جامعة البعث	امتحان مقرر الدوال محدودة التغير	اسم الطالب : [redacted]
كلية العلوم	الفصل الثاني للعام 2014 /2015	الدرجة : 100
قسم الرياضيات	السنة الثالثة - رياضيات	المدة : 90 دقيقة

السؤال الأول(35 درجة): أ) إذا كانت f دالة تحقق شرط ليبشتز على $[a,b]$، فأثبت أنها تكون مستمرة مطلقاً عليها ، ثم حقق ذلك من أجل الدالة : $f(x)=|x|$ على $[-2,2]$ و هل هي قيوسة عليها و لماذا؟.

ب) بين أن مجموع قفزات الدالة:

$$\varphi(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ 0\le x\le 2 \\ x+3 & ; \ 2<x<5 \\ 9 & : \ 5\le x\le 6 \end{cases}$$

في نقاط انقطاعها الداخلية على هذه الفترة أقل أو يساوي الفرق: $\varphi(6)-\varphi(0)$.

-ادرس محدودية التغير لهذه الدالة و كموليتها ريمانياً على $[0,6]$ و ما هو قياس مجموعة نقاط انقطاعها لوبيغياً و لماذا؟

ت)- تأكد من وجود تكامل ستيلجس للدالة: $g(x)=x^2$ بالنسبة ل φ الموجودة في الطلب (ب) ثم احسب قيمته في حال وجوده (أي $J=(S)\int_0^6 g\,d\varphi$).

السؤال الثاني(30 درجة): أ) -إذا كانت الدالة h مستمرة تقريباً في كل مكان على الفترة $[a,b]$ ، فناقش كموليتها لوبيغياً على هذه الفترة ، و متى تكون الدالة العقدية ذ ت م على فترة حقيقية $[a,b]$.

ب) أوجد دالة التغير للدالة : $f(x)=\sqrt{x}$ على الفترة $[1,5]$ مع تغيرها الكلي عليها، وماذا بشأن استمرار دالة التغير الناتجة عند النقطة $x=1$ ، و نوع إطراد الدالة $v_f(x)-f(x)$

ت) بتعيين المجموعة $E(\psi>c)$، أثبت أن الدالة :

$$\psi(x)=\begin{cases} 0 & ; \ x=0 \\ \dfrac{1}{x^2} & ; \ x\ne 0 \end{cases}$$

قيوسة على الفترة $[-1,1]$ حيث c أي عدد حقيقي .

السؤال الثالث(35 درجة): أ) -اكتب صيغة الدالة المميزة على الفترة $[0,1]$، ثم ناقش وجود تكامل ليبيغ لها من عدمه على نفس الفترة ، و أحسبه في حال وجوده .

-عبر عن تكامل ستيلجس المعتل التالي: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,d[x]$ على شكل متسلسلة عددية لانهائية مع دراسة تقارب هذا التكامل أو تباعده (حيث $[x]$ دالة الصحيح).

ب) لو أخذنا المجموعة $X=\{1,2,3,4\}$ و الصف $S=\{\Phi, X, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

و المطلوب : بين أن S تبولوجيا على X و هل هو جبر ، جبر تام ؟ مع ذكر السبب.

- لنضع $\mu^*(E)=\sqrt{|E|}$ حيث $E\subseteq X$ و $|E|$ تمثل عدد عناصر هذه المجموعة،

والمطلوب: بين أن μ^* هذا قياساً خارجياً على X و ليس قياساً (X نفس المجموعة أعلاه).

ت) إذا كان μ قياساً منتهياً على جبر تام ما S_1 ، فناقش صحة المساواة:

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right) \quad ; E_n=\left[-\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+1}\right], n\ge 1$$

نهاية الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

خمص في 2015/6/29

مدرس المقرر: د.محمد عامر

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
الفصل الأول للعام 2013 /2014
السنة الثالثة - رياضيات

اسم الطالب : [redacted]
الدرجة : 100
المدة : ساعتان

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك ، (تمنع الآلة الحاسبة)

السؤال الأول(33 د): (أ) – بين فيما إذا كانت دالة ديريخليه ذت م على الفترة $\left[\sqrt{2}\,,5\right]$ و ما هو تغيرها الكلي،

ثم أنها تساوي الصفر تقريباً في كل مكان على نفس الفترة ، و هل يمكن أن تكون مستمرة مطلقاً عليها ؟ مع ذكر السبب .

(ب) –ناقش مع التوضيح ،فيما إذا كانت دالة الجزء الصحيح اشتقاقية على الفترة $[0,9]$– مستمرة تقريباً في كل مكان و

القيوسية لها على تلك الفترة.

– ابحث في إمكانية أن يكون صف المجموعات المفتوحة جبر تام – جبر مع ذكر قياس $\lambda(Q)$ مع التعليل ؟ .

(ج) –أوضح أن الدالة $y=\sqrt{x}$ مستمرة مطلقاً حسب التعريف على الفترة $[0,1]$، ثم علل هل يلزم أن يكون مشتقها محدوداً

عليها إذا كانت ذت م ، و ما هو تغيرها الكلي .

السؤال الثاني(34 د): (أ) – إذا كانت الدالة f ذ ت م و قيوسة على $[a,b]$،فاثبت أن الدالة f^2 قيوسة و ذ ت م

على تلك الفترة حسب التعريف للمفهومين ، ثم اكتب صيغة دالة التغير لها على نفس الفترة مع ذكر خاصتين لهذه الدالة .

(ب) –بين أن الدالة المميزة للمجموعة $A\subseteq E$ قيوسة على E إذا كانت A مقيسة ، ثم إحسب تكامل ليبيغ لها على الفترة

$[0,1]$ بعد التأكد من وجوده .

(ت) – اعط مثالاً على دالة f ذ ت م و g دالة متزايدة على فترة مثل $[a,b]$ ، بحيث أن الدالة $|f|$ كمولة حسب مفهوم ستيلجس

بالنسبة ل g ، بينما التكامل: $\int_a^b f\,dg$ غير موجود على هذه الفترة .

– احسب قيمة تكامل ستيلجس التالي: $K=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,d\,x^2$ علماً أنه موجود .

السؤال الثالث(33 د):(أ) –بين أن الدوال التالية (وعلى كل فترة تقابلها) :

$f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ ، $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ و $f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n[(1+x)e]^{-n}$ حيث $x\in\,]0,1[$

قيو سة ، ثم بين أن f_2 دالة تحقق شرط ليبشيز و أنها محدودة تقريباً في كل مكان عليها .

(ب)–إذا كانت $X=\mathbb{N}$ والدالة $\mu(A)=\sum_{x\in A}\frac{1}{n}$ حيث $A\in P(N)$ و $\mu(\phi)=0$ و $\alpha_n=\frac{1}{n}$ متتالية حقيقية ، و المطلوب:

1–بين أن الدالة μ قياس على $P(N)$ ، وهل هو منته أم لا ؟ و لماذا ؟ .

2–احسب قياسات المجموعات : N ، $\{2,8,32\}$ ، $\{25\}$ وفق μ .

– إذا كانت f دالة قيوسة على E ، فاثبت أن كلاً من المجموعتين : $\{x\in E: f(x)=-\infty\}$, $\{x\in E: f(x)=\infty\}$

تكون مقيسة ، ثم علل بمثال فيما إذا كانت كل مجموعة مقيسة حسب ليبيغ يجب أن تكون محدودة و عدودة .

انتهت الأسئلة

حمص في 2014/2/12

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

مدرس المقرر: د. محمد عامر

ايمان ابراهيم ...

الاسم : [illegible]
الدرجة : 100
المدة : ساعتان

امتحانات الدورة الإضافية للعام $\frac{2012}{2013}$
مقرر الدوال محدودة التغير
لطلاب السنة الثالثة – رياضيات

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي – جامعة البعث
كلية العلوم – قسم الرياضيات

السؤال الأول (50):

(أ) إذا كانت الدالة g ذ ت م على الفترة [a, b] (حيث a , b حقيقيان ومحدودان)، **فأثبت** أنّ الدالة $I(x) = \sin(g(x))$ ذ ت م على نفس الفترة ، طبعاً باستخدام التعريف.

(ب) اعتماداً على فكرة تكاملي ستيلجس الأعلى والأدنى على الترتيب للدالة f بالنسبة للدالة g على الفترة $[a, b]$ ، **والمطلوب :** بيّن فيما إذا كانت دالة ديريخليه φ المعطاة على الفترة $[\sqrt{2}, 4]$ كمولة أم لا بالنسبة للدالة : $g(x) = x + 5$ على نفس الفترة ؟ مع التعليل ؟

- لتكن الآن الدالة : $F(x) = (8 - x^2)[1 - \varphi(x)]$; $x \in [\sqrt{2}, 4]$ حيث φ دالة ديريخليه السابقة. **نطلب منك :**

1. إثبات أنّ F دالة قيوسة بعد إثبات أنّ φ قيوسة على نفس الفترة المفروضة.
2. أوضح هل الدالة F محدودة تقريباً في كل مكان على $[\sqrt{2}, 4]$ ؟ ولماذا ؟

(ت) بيّن من أجل المتتالية $\alpha_n = \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$ ، أنه تصح المساواة التالية :

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right) = \lim_{n\to\infty}(\mu(\alpha_n))$$

مع أنّ μ قياس منتهٍ على الجبر التام S.

(ث) هل المجموعة :

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[7n, 7n + \frac{1}{\ln n}\right] - Q$$

مقيسة أياً كانت $n \geq 1$ ، وفي حالة الإيجاب ، ما هو قياسها $\lambda(A)$ ، ثمّ أضف ، أوجد $\lambda(R)$ ، $\lambda(\{-2\})$ ، $\lambda([0,1[)$.

(ج) إذا كانت الدالة f معرّفة على المجموعة E ذات القياس المعدوم (حسب ليبيغ) ، فأثبت أنّ هذه الدالة قيوسة عليها. ثمّ إذا كانت E و F مقيستان ، فهل $E\Delta F$ مقيسة ؟ مع توضيح السبب !

السؤال الثاني (50):

(1) اكتب نص المبرهنة الخاصة بحساب تكامل ستيلجس وذلك في حال كانت f مستمرة و g تأخذ قيماً ثابتة على [a, b].

(2) إذا كانت $f \in C_{[0,1]}$ ($C_{[0,1]}$ فضاء الدوال المستمرة على [0,1]) ، كما نعلم ليس بالضرورة أن تكون دالة ما من هذا الصف ذ ت م على [0,1] ، فبيّن ذلك بمثال توضيحي من عندك مع الإثبات وما هو التغير الكلي لهذه الدالة على نفس الفترة ، وكتابة الواجب إضافته لتكون الدالة المطردة بتزايد على R ذ ت م عليها.

(3) لتكن μ قياس على الجبر التام S ، ولتكن $A \in S$ مجموعة ما مثبتة ، وأضف أنّ $0 < \mu(A) < \infty$ ، ولنضع من أجل $A \in S$ العلاقة :

$$\delta(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)} \quad ; \quad B \in S$$

بيّن فيما إذا كانت δ المعرّفة بهذه العلاقة تشكل قياساً على S ، وهل هو منتهٍ - σ - منتهٍ ؟ مع التعليل ؟

(4) بعد التأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي :

$$J = \int_1^3 f(x)\, d\, h(x)$$

حيث :

$$f(x) = x^2 \quad , \quad h(x) = \begin{cases} x + 1 & ; \quad 1 \leq x < 2 \\ 6 & ; \quad x = 2 \\ x^2 & ; \quad 2 < x < 3 \\ 19 & ; \quad x = 3 \end{cases}$$

ثمّ أحسب قيمته بعدئذٍ.

(5) علل ، فيما إذا كانت الدالة $\psi(x) = x^2 + 10$ تحقق شرط ليبيشتز على الفترة [2, 5] ، وهل يمكن لدالة الصحيح أن تكون مستمرة مطلقاً – ذ ت م على الفترة [0, 10] واحسب تغيرها الكلي على هذه الفترة؟

حمص في 2013/08/27م

انتهت الأسئلة
مع تمنياتي لكم بالتوفيق

أستاذ المقرر
د. محمد عامر

الجمهورية العربية السورية	امتحان مقرر الدوال محدودة التغير	الاسم والرقم : [redacted]
وزارة التعليم العالي	الفصل الثاني – سنة ثالثة / رياضيات	الدرجة: 100
جامعة البعث ـ كلية العلوم	العام الدراسي (2012 - 2013)	مدة الامتحان : ساعتان

أجب عن السؤالين التاليين :

السؤال الأول (50 درجة) :

(أ) إذا كان للدالة f مشتقاً موجباً ومحدوداً على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أنّ هذه الدالة تكون ذ ت م ومتزايدة أيضاً على هذه الفترة.

(ب) أكمل النتيجة القائلة ((بفرض أنّ f دالة اشتقاقية على $[a,b]$ – ربما باستثناء عدد محدود من نقاط هذه الفترة .....)) وماهي عبارة التغير الكلي هنا للدالة f.

- طبق ذلك من أجل الدالة $\mathrm{f}(x) = \sin x$ على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ مع حساب تغيرها الكلي على هذه الفترة.

(ت) إذا كانت الدالتان f و g حيث الأولى f مستمرة والثانية g مستمرة و ذ ت م على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أنّ الدالة :

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(u)dg(u) \quad ; x \in [a,b] \ , F(a) = 0$$

ذ ت م على $[a,b]$ ، ثم أنها قيوسة على تلك الفترة.

(ث) اختر تجزئة مناسبة للفترة $[0,2]$ ، بحيث تكون الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ x^2 \sin\dfrac{\pi}{x^2} & ; 0 < x \le 2 \end{cases}$$

ليست ذ ت م على هذه الفترة بدون حل ، وهل يمكن أن تكون هذه الدالة مستمرة مطلقاً ومنحنيها قابل للتقويم على $[0,2]$ ؟ مع التعليل ؟

- اقترح تعديلاً لتصبح الدالة المفروضة ذ ت م على الفترة المذكورة (أيضاً دون ذكر حل).

(ج) اذكر دالتان متزايدتان ومحدودتان على فترة مغلقة ومحدودة بحيث يكون الفرق بينهما دالة ذ ت م عليها ، وما هي مجموعة نقاط انقطاعها ، وما هو قياسها حسب ليبيغ ؟ ولماذا ؟

السؤال الثاني (50 درجة) :

(1) تأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي :

$$J = \int_0^3 \arctan x \ d(8x)$$

وفي حال وجوده ، احسب قيمته عندئذٍ.

(2) اكتب صيغة الدالة λ^* (قاعدة الربط) مع ذكر كل الشروط التي تكون معها هذه الدالة قياساً خارجياً على مجموعة تعريفها ، ثم أثبت صحة أول شرطين فقط من هذه الشروط.

(3) متى نقول عن قياس أنه منتهٍ ، σ- منتهٍ – ثم وضح أنّ قياس ليبيغ λ في المجموعة R هو σ- منتهٍ من أجل المجموعات :

$$E_n = [-n,-n+1[\cup [n-1,n[\ ; n = 1,2,\ldots$$

(4) – ليكن لدينا صف المجموعات وحيدة العنصر : $\mathcal{A} = \{\{x\} \ ; \ x \in R\}$ والمطلوب :

هل هذا الصف جبراً ؟ ولماذا ؟ علماً أنه تبولوجيا وما العلاقة بين الجبر والتبولوجيا ؟

- بيّن أنّ كل مجموعة وحيدة العنصر مثل $\{y\}$ في R هي بوريلية ، وهل هي لوبيغيه ؟ وما هو قياسها في هذه الحالة ؟

(5) بيّن فيما إذا كانت المجموعة :

$$I = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x \ ; \ \frac{1}{k+1} \le x < \frac{1}{k} \right\}$$

مقيسة حسب مفهوم ليبيغ ، وما هو قياسها إن كانت مقيسة ؟ مع أن مجموعاتها منفصلة مثنى مثنى.

حمص في 2013/6/11

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة البعث ـ كلية العلوم

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
الفصل الأول سنة ثالثة / رياضيات
العام الدراسي (2012 - 2013)

الاسم: [redacted]
الدرجة : 100
مدة الامتحان : ساعتان

مع مراعاة ترتيب ورقتك أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول :

(1) إذا كانت g دالة كمولة ريمانياً على الفترة المغلقة والمحدودة [a , b]، فأوضح فيما إذا كانت الدالة G والمعرّفة بالشكل:
$G(x) = c + \int_a^x g(t)dt \; ; x \in [a, b]$ مستمرة مطلقاً على هذه الفترة أم لا ؟ مع ذكر السبب. (حيث c ثابت حقيقي مغاير للصفر).

(2) أثبت أن الدالة $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ تحقق شرط ليبتشز على الفترة [5 , 1] ثم علل بكلمات فيما إذا كانت f ذ ت م – قيوسة ومستمرة بانتظام على تلك الفترة.

(3) تحقق من أن متتالية الدوال : $\varphi_n(x) = (1 - x)^n$ متقاربة تقريباً في كل مكان على الفترة [0,1] من دالة يُطلب ذكرها هنا ، وهل هي متقاربة من تلك الدالة بالقياس مع ذكر هل العكس صحيح أم لا ؟ على نفس الفترة ($n \geq 1$) .

السؤال الثاني :

(1) إذا كانت f دالة ذ ت م وقيوسة على [a , b]، فأثبت أن مربعها (f^2) يكون كذلك على تلك الفترة باستخدام التعريف لكل مفهوم على حدى.

(2) بيّن أنّ :
$$J = (s) \int_0^\infty e^{-x} \, d[x] = \frac{1}{e-1}$$
علماً أن التكامل موجود على الفترة] ∞ , 0]، وهل الدالة الدرجية هنا مستمرة تقريباً في كل مكان على فترة مثل [a , b] ؟ ولماذا ؟ وما هو تغيّرها الكلي ، أي الدالة الدرجية على [a , b].

(3) بفرض أنّ : $X \neq \emptyset$ مجموعة ما ، **والمطلوب إثبات** أن الصف $P(X)$ هو صف مطرد ، وأن الصف $\mathcal{M}_{\mu^*}$ جبراً تاماً على X حيث μ^* قياس خارجي على P(X) ، وهل $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}$ بدون تعليل ؟ .

السؤال الثالث :

(1) نعلم إذا كان للدالة h مشتقاً h' محدوداً على [a, b] فتكون ذ ت م عليها ، أتكون هذه النتيجة صحيحة فيما لو لم يكن هذا المشتق موجوداً في عدد منتهٍ من نقاط [a , b] ، بيّن ذلك بمثال من عندك.

(2) لنعرف على الجبر التام S على مجموعة ما X الدالة μ بالعلاقة: $\mu(E) = 0$ حيث $E \in S$، فعلل إذا كانت شروط القياس هنا محققة على S وهل هو منتهٍ أيضاً ؟ ولماذا ؟ .

– خذ المتتالية $F_n = [0, \frac{n+1}{n}]_{n \geq 1}$ ، فأوجد $\lim_{n\to\infty} F_n$ ، وما هو قياس ليبيغ لها ؟ .

(3) ليكن المشتق المستمر f' للدالة f على [a , b] والمطلوب إثبات أنّ :

$$\sum_{n=[a]+1}^{[b]} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)((x))\,dx + f(a)((a)) - f(b)((b))$$

حيث : $((x)) = x - [x]$ ، مع أنّ التكاملات جميعها موجودة، ثم انظر ماذا تستنتج عندئذٍ.

حمص في 2013/1/17 م

انتهت الأسئلة
مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

أستاذ المقرر
د. محمد عامر

جامعة البعث	امتحانات الدورة الثالثة 2012/2011	الاسم : .[redacted]
كلية العلوم	السنة الثالثة – رياضيات	المدة : ساعتان
قسم الرياضيات	مقرر الدوال محدودة التغير	الدرجة : 100

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : " تمنع الحاسبات "

السؤال الأول (40 د):

(أ)- إذا كانت الدالة f ذ ت م على [a,b] فاثبت اعتماداً على التعريف أن الدالة $\frac{1}{f}$ بشرط (f≠0) ذ ت م على نفس الفترة مع ذكر تغيرها الكلي عليها ، ثم احسب التغير الكلي للدالة ؛ $g(x)= \sin^4(x) + \cos^4(x)$ على الفترة [0,π] .

(ب)- إذا كانت الدالة $h(x)=\sqrt[3]{x}$ معرفة على الفترة [0,3]فهل كون المشتق h' محدودا شرط ضروري لتكون الدالة ذ ت م عليها ، قرر ذلك مع التعليل ؟

(ج)- أثبت أن تقاطع أسرة من الجبور التامة في X≠∅ هو جبر تام في X ، وهل صف الفترات المفتوحة في ℝ جبر- جبر تام ؟ ولماذا ؟

السؤال الثاني(35 د):

(1)- بفرض لدينا الدالتين f_1 و f_2والمعرفتان على [-1,4] وفق الصيغتين التاليتين :

$$f_1(x)=\begin{cases}1 & ; x\neq 0\\ 5 & ; x=0\end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases}0 & ; x\neq 0\\ 3 & ; x=0\end{cases}$$

والمطلوب:

ادرس فيما إذا كان تكامل ستيلجس $J=\int_{-1}^{4} f_1\, df_2$ موجودا وذلك بطريقتين مختلفتين، وإن كان موجوداً فاحسبه.

(2)- إذا كان c∈ℝ وf دالة معرفة على المجموعة E المقيسة عندئذٍ إذا كانت E(f≤c) مقيسة فبين أن المجموعة : E(f>c) أيضاً مقيسة من أجل c ،وهل هذا يؤدي بدوره إلى أن المجموعة E(f ≥ c) كذلك مقيسة؟ ولماذا؟

(3)- إذا كانت G مجموعة قابلة للعد على الأكثر ، فاثبت أنها ذات قياس معدوم حسب ليبنغ .

السؤال الثالث (25 د):

(أ)- ليكن S جبراً تاماً على X≠∅ والعنصر x∈X ولنضع

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & ; x\in A \\ 0 & ; x\notin A\end{cases} \quad , A\in S$$

والمطلوب :

(1)- بين أن الدالة δ_x قياساً على S وماذا يسمى هذا النوع من القياس؟ وهل هو احتمالي ؟ ولماذا؟

(2)- بين فيما إذا كان σ - منته ، ولماذا؟ وهل هو منته؟

(ب)- لتكن f دالة ذ ت م على الفترة [a,b] ، أثبت أن دالة التغير لها متزايدة و ذ ت م على نفس الفترة ، وهل يمكن أن تكون هذه الأخيرة قيوسة على [a,b]؟ وضح ذلك مع التعليل؟

حمص في 2012/10/7

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالنجاح

أستاذ المقرر

د. محمد عامر

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان الفصل الأول للعام $\frac{2011}{2012}$
لمقرر الدوال محدودة التغير
السنة الثالثة - رياضيات

الاسم :
المدة : ٢ سا
الدرجة : ١٠٠

أجب عن الاسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في أجابتك : (تمنع الحاسبات)

السؤال الأول : (30°)

١. إذا كانت الدالة f مطردة على الفترة [a , b] فاثبت أنها ذ ت م مع ذكر تغيرها الكلي عليها ، وهل يمكن للدالة $f(x)=e^x$ أن تكون ذ ت م على الفترة] ∞+ , 0] مع التعليل ؟

٢. ليكن $\mu^*(E)=0$, والمطلوب : إثبات أن المجموعة E تكون مقيسة بالنسبة للقياس الخارجي μ^* .

٣. أوجد دالة التغير للدالة : $h(x)=[x]+9$ على الفترة [1 , 4] ، ثم بين أن $V_a^b(v_h(x)) = V_a^b(h)$

السؤال الثاني : (30°) :

١. لتكن لدينا التجزئة $T_n = \{0 , \frac{1}{2n} , \frac{1}{2n-1} , ... , \frac{1}{2} , 1\}$ للفترة المغلقة [0 , 1] ، والمطلوب : بين بأستخدام هذه التجزئة والتعريف فيما إذا كانت الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} : 0 < x \le 1 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$$

ذ ت م على [0 , 1] ، أم لا ؟ ولماذا ؟ وماهو تغيرها الكلي عندئذ ؟ .

٢. إذا كانت $\lambda(E) = 0$ ، فإن الدالة f المعرفة على E المقيسة تكون قيوسة عليها

٣. لتكن المجموعة $A \subset X$ (حيث $X \neq \emptyset$) فأكتب الجبر التام التي تولده هذه المجموعة ، وماذا نعني بقياس ليبيغ λ ثم أوجد : λ(Q) ، λ([-1,9[) ، λ({0}) .

السؤال الثالث :(24°)

١- أكتب الدالة g(x)= arc tan x *على الفترة* [0 , 1] *على شكل تكامل بحده الأعلى مع أثبات أن الدالة* g ذ ت م على تلك الفترة ثم أحسب تغيرها الكلي عندئذ.

٢- خذ الدالة g السابقة وأحسب التكامل التالي : $J = (S)\int_0^1 \frac{x}{4} dg(x)$ بعد التأكد من وجوده .

السؤال الرابع (16°)

١- بين أن الدالة ψ المعرفة على الفترة [1 , 1-] *بالشكل :*

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^4} \ ; \ x \neq 0 \\ 0 ; \quad x = 0 \end{cases}$$

قيوسة على تلك الفترة

٢- أثبت أن كلا من مجموعة الأعداد العادية والغير عادية التي تنتمي إلى الفترة $[\sqrt{2} , 5]$ تكون مقيسة حسب مفهوم ليبيغ وأحسب قياس كل منها

أنتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالنجاح

أستاذ المقرر د. محمد عامر

جامعة البعث | امتحان مقرر الدوال محدودة التغير | الاسم: رشا دله
كلية العلوم | لطلاب السنة الثالثة رياضيات | الرقم: ١٨٢٠٦
قسم الرياضيات | الفصل الأول للعام 2010–2011 | المدة: ساعتان

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقة الإجابة : (يمنع استخدام الآلات الحاسبة)

السؤال الأول (25 درجة):

(أ) أوجد دالة التغير للدالة : $h(x)=\cos x$ على الفترة $[0,\pi]$ ، ثم بين أن الدالة $f(x)=|x|$ قيوسة على نفس الفترة و احسب تكامل ستيلجس للدالة f بالنسبة لـ h على الفترة $[0,\pi]$ بعد التأكد من وجوده.

(ب) إذا كانت $\mu^*(G)=0$ ، حيث μ^* قياس خارجي على $P(X)$ ، فأثبت أن:

$$\mu^*(E\cup G)=\mu^*(E-G)=\mu^*(E)$$

حيث E مقيسة بالنسبة لـ μ^* و تنتمي إلى $P(X)$.

السؤال الثاني (25 درجة):

(أ) لتكن الدالتان: $g(x)$ و $f(y)$ حيث الأولى مستمرة مطلقا على الفترة $[a,b]$ و الثانية تحقق شرط ليبشتز على الفترة $[\alpha,\beta]$، و أضف إلى هنا مجموعة قيم g محتواة في الفترة $[\alpha,\beta]$. و المطلوب: إثبات أن تركيبهما $(f\circ g)$ دالة مستمرة مطلقا على $[a,b]$ باستخدام التعريف.

(ب) إذا كانت الدالتان

$$f(x)=\begin{cases} x & ; \ 0\le x<1 \\ 2 & ; \ x=1 \\ x+1 & ; \ 1<x\le 2 \end{cases} \qquad \text{و كذلك} \qquad \varphi(x)=[x]$$

فهل تكامل ستيلجس f بالنسبة لـ φ موجود ؟ مع التعليل ؟ على الفترة $[0,2]$.

السؤال الثالث (25 درجة):

(أ) وضح فيما إذا كانت دالة محدودة التغير على فترة $[a,b]$ هي قيوسة عليها ؟

(ب) أثبت أن أية دالة ثابتة قيوسة على المجموعة E المقيسة، ثم احسب تكامل ليبيغ لها على المجموعة $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{7n},\frac{1}{7n}+\frac{1}{2^n}\right]$ بعد التأكد من وجوده، و هل كل دالة كمولة لوبيغياً هي كمولة ريمانياً ؟ اذكر مثالا يدعم ذلك بدون حل.

(ت) بين أن الصف: $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ جبر تام على X ، حيث μ^* قياس خارجي على $P(X)$.

السؤال الرابع (25 درجة):

(أ) أثبت " إذا كانت الدالتان f مستمرة و g محدودة التغير على الفترة $[a,b]$، فإن التكامل $(S)\int_a^b fdg$ يكون موجوداً ".

(ب) لتكن $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ متتالية من الدوال القيوسة على المجموعة E بحيث أن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{ae} f$ ، فإذا كان: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{ae} g$، و المطلوب: إثبات أن: $f \overset{ae}{=} g$.

حمص في 17 / 1 / 2011 | انتهت الأسئلة | مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرس المقرر: د. محمد عامر

Scanned by CamScanner

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان الدورة الفصلية الصيفية للعام ٢٠١٠-٢٠١١
لمقرر الدوال محدودة التغير
لطلاب السنة الثالثة - رياضيات

الاسم:
المدة : ٢ سا
الدرجة: ١٠٠

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقة الإجابة: (تمنع الآلات الحاسبة)

السؤال الأول (١٠ درجة):

أ- إذا كانت الدالة f ذات تغيرات محدودة على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أنه يلزم ويكفي أن توجد دالة $G(x)$ متزايدة ومحدودة على $[a,b]$ وتحقق العلاقة :

$$|f(x'')-f(x')| \le G(x'')-G(x') \; ; \; a \le x' < x'' \le b$$

ب- احسب تكامل ستيلجس (علماً أنه موجود) : $J=(s)\int_0^1 \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx^2$ باستخدام طريقة تبديل المتغير .

ت- بين فيما إذا كانت الدالة: $h(x)=[x]$ مستمرة تقريباً في كل مكان على الفترة $[-1,5]$ ، وهل هي قيوسة أم لا على هذه الفترة ، ولماذا ؟

ث- إذا كانت μ دالة مجموعات معرفة على $S=\mathcal{P}(X)$ حيث $X \neq \phi$ كما يلي : $\mu(E)=0 \; , \; \forall E \subseteq X$ ، فأثبت أن μ قياس على S و أنه متزايد ، وهل هو منته أم لا ؟ مع ذكر السبب .

السؤال الثاني (٣٠ درجة):

أ- لتكن لدينا الدالة g المعرفة على الفترة $E=[0,4]$ بالشكل :

$$g(x)=\begin{cases} x^2-3 & ; \; x \in [0,4]-\mathbb{Z} \\ 0 & ; \; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

والمطلوب : ١- هل g دالة قيوسة على $E=[0,4]$ ؟ مع التعليل ؟

٢- بين أن الدالة $h(x)=x^2-3$ قيوسة على E ، ثم احسب قيمة تكامل ليبيغ للدالة h على E بعد التأكد من وجوده .

ب- أثبت أن تقاطع أسرة من الجبور التامة غير الخالية على X هي من جديد جبر تام على X ،ثم اذكر صفين مولدين لجبر بوريل .

ت- اذكر مثالاً لدالة مستمرة على فترة محدودة $[a,b]$ وليست ذات تغيرات محدودة عليها ، مع إثبات ذلك .

السؤال الثالث (٣٠ درجة):

أ- لتكن لدينا الدالة : $B(x)=c+\int_a^x g(t)\,dt$ حيث g دالة كمولة ريمانياً على الفترة $[a,b]$ و c ثابت ما ، فهل الدالة B مستمرة مطلقاً على الفترة $[a,b]$ باستخدام التعريف ، وإذا كانت كذلك فهل هي كمولة لوبيغياً على تلك الفترة ؟ ولماذا ؟

ب- أوجد دالة التغير للدالة : $f(x)=\begin{cases} x \; ; \; 0 \le x < 1 \\ x^2 \; ; \; 1 \le x \le 3 \end{cases}$ على الفترة $[0,3]$ ، ثم بين فيما إذا كانت الدالة $f - V_0^x(f)$ ذات تغيرات محدودة على نفس الفترة ؛ مع التعليل ؟

ت- أثبت أن متتالية الدوال التي حدها العام : $F_n(x)=x^n \; (n \ge 1)$ متقاربة تقريباً في كل مكان من دالة يطلب تعيينها على الفترة $[0,1]$ ، وهل دالة النهاية قيوسة على تلك الفترة ؟ ولماذا ؟

حمص في ٢٠١١/٨/١٠

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

مدرس المقرر
د. محمد عامر

الفصل الدراسي الأول ٢٠١٠/٢٠٠٩
السنة الثالثة - رياضيات
المدة: ساعتان

السؤال الأول (٢٠ درجة): (أ) - لتكن f دالة مستمرة و g دالة محدودة التغير على الفترة $[a,b]$، و لنضع

$$F(x) := \int_a^x f(t)dg(t) \quad ; \quad x \in [a,b]$$

و المطلوب:

١- أثبت أن الدالة F محدودة التغير على الفترة $[a,b]$.

٢- إذا كانت الدالة g مستمرة في النقطة $x = x_0$، فبين أن الدالة F تكون كذلك.

(ب) اذكر مثالاً عن دالة تحقق شرط ليبشتز على فترة مغلقة و محدودة، بحيث تكون فيه مستمرة مطلقاً و قابلة للمكاملة لوبيغيا على الفترة، مع ذكر الحل فقط لتحقق الشرط على الفترة المذكورة.

السؤال الثاني (٢٠ درجة): (أ). لتكن لدينا الدالة:

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad 0 \le x < 1 \\ 5 & ; \quad x = 1 \\ x + 3 & ; \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

والمطلوب:

١- اكتب هذه الدالة على شكل فرق دالتين متزايدتين على الفترة $[0,2]$.

٢- إذا كانت $f_1(x) = e^x$ معرفة على $[0,2]$، فأحسب قيمة التكامل $(S)\int_0^2 f_1(x)d\psi(x)$ بعد التأكد من وجوده.

(ب) بين إذا كانت الدالة f مستمرة تقريباً في كل مكان على المجموعة E، فإن f تكون قيوسة على E.

السؤال الثالث (٢٠ درجة): (أ). لتكن f دالة حقيقية معرفة على الفترة $[0,1]$ بالشكل:

$$f(x) = 0 ; \ x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right[,\ f(x) = \tfrac{1}{2} ; \ x \in \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right[,\ f(x) = \tfrac{3}{4} ; \ x \in \left[\tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{8}\right[, \dots , f(x) = 1$$

بين أن هذه الدالة المتزايدة تقفز عند كل نقطة: $x_k = 1 - \frac{1}{2^k} ; (k \ge 1)$ تساوي $\frac{1}{2^k}$، ثم أحسب:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)].$$

(ب) لتكن المجموعة $X = \{1, 2, 3, \dots\}$ و لتكن الجبر التام $S = \mathcal{P}(X)$، و لنضع

$\mu(\phi) = 0 \ , \ \mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2}$; أثبت أن μ تعرف قياساً على S، و هل هو منته؟ مع التعليل.

السؤال الرابع (٢٠ درجة): لنعرف الدالة f بالشكل: $f(x) = x^2[1 - \varphi(x)] ; x \in [2,5] = E$ حيث φ دالة ديريخليه على E، والمطلوب:

١- هل الدالة $h(x) = 1 - \varphi(x)$ مكاملة حسب ستيلتجس بالنسبة للدالة $g(x) = 2x$ على الفترة $E = [2,5]$، ولماذا؟

٢- بين أن دالة ديريخليه تساوي الصفر تقريباً في كل مكان على الفترة E،

٣- بين وجود التكامل $(L)\int_E f(x)d\lambda$، ثم أحسب قيمته في حال وجوده.

انتهت الأسئلة

٢٠١٠/١/١٧ — مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح — مدرس المقرر
د. محمد عامر

أجب عن ... أكثر من سؤال ضلعة: .... الاسم: ....

(يمنع استخدام الآلات الحاسبة)

السؤال الأول (30 درجة):

(أ) إذا أمكن كتابة الدالة g بالشكل:

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt \quad ; \; x \in [a,b]$$

بحيث أن التكامل $\int_a^b |\varphi(t)|\,dt$ موجود و محدود ، عندما أثبت أن g محدودة التغير على الفترة $[a,b]$.

(ب) اكتب الدالة $g(x) = arctgx$ على الفترة $[0,\sqrt{3}]$ كما في الطالب الأول ثم بين أن التكامل $J = (S)\int_0^{\sqrt{3}} x^2 dg(x)$ موجود واحسبه عندئذ ، كما و يطلب حساب $= V_0^{\sqrt{3}}(g)$.

(ت) إذا كانت $f(x) \overset{\sim}{=} 0$ على المجموعة E المقيسة ، فإن $\int_E f(x)\,d\lambda = 0$ بدون إثبات ، و المطلوب:

هل العكس صحيح بشكل عام ؟ وضح ذلك بمثال مع الحل.

السؤال الثاني (25 درجة):

(أ) لتكن الدالة h المعرفة على الفترة $[0,1]$ بالشكل التالي:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & ; \; x = 0 \\ \dfrac{1}{x^{\alpha}} & ; \; 0 < x \le 1 \end{cases} \quad ; \; 0 < \alpha < 1$$

والمطلوب: هل الدالة كمولة حسب مفهوم ليبيغ على الفترة $[0,1]$ ، ثم احسبه في حال وجوده.

(ب) ماذا نقصد بـ: جبر بوريل ، مع ذكر طريقتين لتوليده. - التقارب بالقياس لمتتالية دوال ، و ما هي العلاقة بينه و بين مفهوم التقارب تقريبا في كل مكان على مجموعة E ، و أيهما لا يؤدي إلى الآخر.

(ت) أثبت أن الدالة المميزة للمجموعة A المقيسة من المجموعة E المقيسة $(I_A(x))$ قيوسة على E (بعد كتابة صيغتها)، و ما هي قيمة $= I_{A\cup\bar{A}}(x)$.

السؤال الثالث (25 درجة):

(أ) لتكن متتالية الدوال $\{\psi_n(x)\}_{n\ge1}$ المعرفة بالشكل $\psi_n(x) = xe^{-nx}$ على الفترة $[1,3]$ ، و لتكن الدالة:

$$g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 \sin\dfrac{1}{x-2} & ; \; x \ne 2 \\ 0 & ; \; x = 2 \end{cases}$$

والمطلوب: 1) إيجاد الدالة $\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \psi(x)$ على الفترة $[1,3]$.

2) بين (مع التعليل) فيما إذا كانت المساواة التالية صحيحة:

$$\lim_{n\to\infty} (S)\int_1^3 \psi_n(x)\,dg(x) = (S)\int_1^3 \psi(x)\,dg(x)$$

(ب) لتكن متتالية المجموعات $\{A_n\}_{n\ge1}$ حيث $A_n = \left[0, \frac{n-1}{n}\right]$ ، والمطلوب:

i) أوجد نهاية هذه المتتالية.

ii) أثبت أن $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ مقيسة حسب ليبيغ ، ثم احسب قياسها بطريقتين مختلفتين.

$\lim \psi_n(x) = \lim \frac{x}{e^{nx}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\, e^{nx}} = \frac{1}{\infty} = 0$

انتهت الأسئلة

دمشق في ... / 2010

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

مدرس المقرر: د. ...

جامعة البعث — امتحانات الدورة الإضافية من العام الدراسي 2009 - 2010

كلية العلوم

[redacted]

قسم الرياضيات — الدرجة: 80 — المدة: 2 ساعة — الاسم:

السؤال الأول (27 درجة): (أ) إذا كانت الدالة f تحقق شرط ليبشتز على الفترة $[a,b]$، فاثبت أنها تكون محدودة التغير على هذه الفترة، و ما هو تغيرها الكلي عندئذٍ.

(ب) بين أن الدالة $g(x) = x - x^2$ تحقق شرط ليبشتز على الفترة $[0,2]$، و هل يمكن أن تكون مستمرة مطلقاً و قيوسة على تلك الفترة؟ وضح ذلك.

(ت) إذا كانت الدالة $h(x) \overset{a.e}{=} 0$ على المجموعة G فإن: $\int_G h(x)\,d\lambda = 0$، و المطلوب:

هل عكس ذلك صحيحاً؟ وضح ذلك بمثال من عندك مع ذكر الحل.

السؤال الثاني (33 درجة): (أ) احسب قيمة التكامل التالي: $J = (S)\int_0^5 e^x\,dg(x)$، حيث

$$g(x) = \begin{cases} -1 & : 0 \le x \le 1 \\ 0 & : 1 < x \le 4 \\ 2 & : 4 < x \le 5 \end{cases}$$

بعد التأكد من وجوده.

(ب) اثبت أن الدالة $\varphi(x) = [x]$ قيوسة على الفترة $[0,5]$، و ما هي مجموعة نقاط انقطاعها على هذه الفترة؟ و ما هو قياسها؟ و هل هي مستمرة تقريباً في كل مكان على هذه الفترة؟ مع التعليل؟.

(ت) لتكن $X = \{1,2,\ldots,6\}$ فضاء الحوادث الابتدائية (مجموعة النتائج) لتجربة عشوائية، فمن أجل حدث ما $A = \{1\} \subset X$، لنأخذ الصف $T = \{\emptyset, A, A^c, X\}$، ابحث فيما إذا كان هذا الصف يشكل جبراً تاماً؟ و ماذا تسمي هذا النوع من الجبور في حالة الإيجاب؟

السؤال الثالث (20 درجة): (أ) اثبت أن المجموعة $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} + \frac{1}{7^n}\right]$ مقيسة، و ما هو قياسها؟ ثم تأكد من وجود التكامل: $I = (L)\int_E f(x)\,d\lambda$، حيث $f(x) = 6 = const$ و احسبه.

(ب) - ماذا نقصد بالتقارب بالقياس لمتتالية دوال ما، و ما هي العلاقة بين التقارب بالقياس و التقارب تقريباً في كل مكان على مجموعة ما و لتكن E.

- لتكن لدينا المتتالية: $B_n = \left[0, \frac{n-3}{n}\right]$، أوجد نهايتها، و ما هو قياسها حسب مفهوم ليبغ.

حمص في 20 / 9 / 2010 — انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

مدرس المقرر: د. محمد عامر

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الإضافية من العام الدراسي 2009 - 2010
مقرر التوابع محدودة التغير لطلاب السنة الثالثة – رياضيات
الدرجة: 80 المدة: 2 ساعة الاسم:

السؤال الأول (30 درجة):

(أ) اثبت أنه إذا كان للدالة f مشتق موجب محدود على الفترة $[a,b]$، فإنها تكون محدودة التغير على هذه الفترة، و هل هي كمولة حسب لبيغ على هذه الفترة؟ وضح ذلك.

(ب) إذا كانت $\mu^*(E) = 0$ ، فاثبت أن $\overline{(E)}$ مجموعة مقيسة بالنسبة لـ μ^* (حيث μ^* قياس خارجي على X غير خالية).

(ت) لتكن الدالة:
$$\varphi(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} & ; \ x \neq 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \end{cases}$$
على الفترة $[0,1]$.

بين أن هذه الدالة ليست محدودة التغير على هذه الفترة، وهل هي مستمرة مطلقا و كبوسة على تلك الفترة؟ و لماذا؟

السؤال الثاني (25 درجة):

(أ) اثبت أن الدالة
$$h(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & ; \ x \neq 0 \end{cases}$$
كبوسة على الفترة $[-1,1]$ باستخدام التعريف.

(ب) احسب قيمة التكامل التالي
$$J = (S)\int_{-1}^{3} x^2 dg(x)$$
حيث
$$g(x) = \begin{cases} 2x & ; \ -1 \le x \le 0 \\ 1 & ; \ 0 < x \le 2 \\ 1 - x^2 & ; \ 2 < x \le 3 \end{cases}$$
، بعد التأكد من وجوده على هذه الفترة.

السؤال الثالث (25 درجة): (أ) ليكن S جبرا تاما على مجموعة X غير خالية، و ليكن μ قياسا على S بحيث أن: $A \in S$; $0 < \mu(A) < \infty$، و لنضع من أجل المجموعة المثبتة $A \in S$ المساواة: $B \in S$; $\delta(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}$ بين فيما إذا كانت δ قياسا على S، و إن كان إيجاباً، فهل هو σ – منته؟ مع التعليل. (ب) إذا كانت G مجموعة مقيسة على الفترة $[a,b]$، فتأكد من وجود التكامل $I = (L)\int_{[a,b]} I_G(x)\, d\lambda$ حسب لبيغ، ثم احسب قيمته، حيث I_G هي الدالة المميزة للمجموعة G.

انتهت الأسئلة

حمص في 22 / 9 / 2010

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

مدرس المقرر: د. محمد عامر